§ 紧群的表示

什么是紧群. 例

$U(n) := \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid g^* g = 1\} \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ 酉群

$\Rightarrow U(n) = \text{compact group}$

$U(1) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\} = S^1 \cong T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$SU(n) = \{T \in U(n) \mid \det T = 1\}$ 特殊酉群

$O(n) = \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid g^T g = 1\}$ 正交群

$SO(n) = \{T \in O(n) \mid \det T = 1\}$ 特殊正交群

$U(n) = U(1) \times \underline{SU(n)} / (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

play important role in rep. theory.

$Sp(n) = \{q \in M_n(\mathbb{H}) \mid q^* q = I\}$

$Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\} \cong S^3 \cong SU(2)$

$GL_n(\mathbb{Z}_p)$ $Sp_{2n}(\mathbb{Z}_p)$, ...

基本概念:

拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$. 开集, 闭集, 连续映射. 同胚, 开映射, 闭映射.

离散拓扑 (拓扑)子空间, 诱导拓扑 eg. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

卡氏积 s.t. $X\times Y \to X$ 和 $X \times Y \to Y$ 连续的最粗拓扑.

粘合拓扑: $(X, \mathcal{T})$ = 拓扑空间, $\pi: X \to Y$

称 Y 上使得 π 连续的最细拓扑为粘合拓扑

邻域, (子集的)极限点, 闭包, 稠密集, 连通 Hausdorff 空间. T_1-空间

开覆盖, 子覆盖, 紧致拓扑空间

定义: 1). 称带有拓扑的群 G 为拓扑群, 若

- G 为 Hausdorff 空间 部分书籍中不作要求
- $m: G \times G \to G$, $inv: G \to G$ 连续.

2). 设 G 为拓扑群, 若 G 为紧致拓扑空间, 则称 G 为紧群

3) ...... 局部紧致 ... ... 局部紧群

例: 1) 有限群对离散拓扑是紧群

2) $G_1\times G_2$ 紧 $\Leftrightarrow$ G_1,G_2 紧

3) 紧子群的闭子群，和商群

例: 1) 离散拓扑群局部紧

2) $(\mathbb{R}^n,+),(\mathbb{C}^n,+)$

3) $GL_n, Sl_n,\cdots$ Lie groups

定义: G_1,G_2 拓扑群, $f:G_1\to G_2$ 群同态. 若 f 连续, 则称 f 为拓扑群同态

· 开同态, 同构.

例: 1) $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ $x\mapsto e^x$

2) $O_2\to S^1$ $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mapsto e^{i\theta}$

拓扑群基本性质:

1° $\left.\begin{array}{l} l_a: G\to G,\ g\mapsto ag \\ r_a: G\to G\ \ g\mapsto ga\end{array}\right\}$ 同胚 $\rightsquigarrow$ 齐性空间 (i.e. $\forall x,y$ $\exists$ 同胚 $x\mapsto y$)

2° $A \overset{\circ}{\hookrightarrow} G \Rightarrow Ag,\ gA,\ A^{-1} \overset{\circ}{\hookrightarrow} G$

3° $A \overset{\circ}{\hookrightarrow} G,\ B\subseteq G \Rightarrow AB, BA \overset{\circ}{\hookrightarrow} G$

4° $A \hookrightarrow G,\ B\subseteq G$ 有限子集 $\Rightarrow AB, BA \hookrightarrow G$

5° A,B 紧 $\Rightarrow$ AB 紧

6° $H\leqslant G$, $H \overset{\circ}{\hookrightarrow} G \Rightarrow H \hookrightarrow G$

7°: $H\leqslant G$, $H \overset{\circ}{\hookrightarrow} G \Leftrightarrow \exists\, U \overset{\circ}{\hookrightarrow} G$ s.t. $U\subseteq H$.

性质: G 拓扑群, $H\leqslant G$

1) G/H Hausdorff空间 (粘合拓扑) $\Leftrightarrow$ $H \hookrightarrow G$

2) G/H = 拓扑群 $\Leftrightarrow$ H 闭正规子群

此时: G 紧 $\Rightarrow$ G/H 紧

3) $f: G_1\to G_2$ 开同态, 则

$\ker f$ 闭正规, $\operatorname{Im} f$ 闭. 且 $\tilde{f}: G_1/\ker f\to \operatorname{Im} f$ 开.

注:

抽象群	拓扑群
子群	闭子群
正规子群	闭正规子群
同态	开同态

定义：设 G 为拓扑群，$C(G,\mathbb{R})=\{f:G\to\mathbb{R}\mid f\text{连续}\}$ 称映射

$$\int_G : C(G,\mathbb{R})\to\mathbb{R} \qquad f(x)\mapsto \int_G f(x)\,dx$$

为 G 上的一个（左）Haar 测度 /（左）不变测度 / Haar 积分 / 不变积分 若

i) 线性：$\int_G(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_G f(x)dx+\beta\int_G g(x)dx$

ii) 正定性：$f(x)\geq 0\ (\forall x\in G)\Rightarrow \int_G f(x)dx\geq 0.\quad$ ("=" $\Leftrightarrow f\equiv 0$)

iii) 不变性：$\int_G f(gx)dx=\int_G f(x)dx=\int_G (f(xg))dx\quad(\forall g\in G)$

iv) 规范性：$\int_G 1\,dx=1$

v) 可逆性：$\int_G f(x^{-1})\,dx=\int_G f(x)\,dx$.

例：1) $|G|<\infty \rightsquigarrow \int_G f(x)dx:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)$

2) $G=S^1 \rightsquigarrow \int_G f(x)dx:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\,d\theta$

定理：任一紧群上有且仅有一种不变积分.

$C(G,\mathbb{C})=\{f=g+ih:G\to\mathbb{C}\mid f\text{连续}\}\qquad \int_G f(x)dx:=\int_G g(x)dx+i\int_G h(x)dx$

称之为 G 上复值连续函数的不变积分

- 线性，不变性，规范性，可逆性
- 正定性：$h=0,\ g\geq 0\Rightarrow \int_G f(x)dx\geq 0\quad$ ("=" $\Leftrightarrow f\equiv 0$)

性质：若 G,H 紧，则

$$\int_{G\times H}f(z)dz=\int_G\left(\int_H f(x,y)dy\right)dx=\int_H\int_G f(x,y)\,dx\,dy$$

更一般地，有：

定理：任一局部紧群 G 上（在差一个常数意义下）有且仅有一个积分

$$\int_G : \underbrace{C_c(G)}_{\text{紧支函数集}}\to\mathbb{C}\qquad f(x)\mapsto\int_G f(x)dx$$

满足 i), ii) 和 iii).

例：$G=(\mathbb{R},+)\quad \int_G f(x)dx:=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx\quad$ (通常积分)

$G=(\mathbb{R}^\times,\cdot)\quad \int_G f(x)dx:=\int_{\mathbb{R}^\times}f(x)\,d\log x$

§紧群的线性表示

$\mathbb{F}=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$.　V=有限维$\mathbb{F}$-空间.

性质: $G \xrightarrow{\varphi} GL(V)$ 连续 $\Leftrightarrow$ $G\times V\to V$ 连续

此时, 称(V,φ)为G的$\mathbb{F}$-表示, 称V为连续G-模

矩阵表示,　子表示, 同构, Schur引理.

例: 1) 有限群的$\mathbb{F}$-表示

2) $\varphi_n: S^1\to\mathbb{C}^*$　$z\mapsto z^n$ 为S^1的1维表示

3). $\left.\begin{array}{l} O_n\times M_n(\mathbb{R})\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ U_n\times M_n(\mathbb{C})\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\}$ $(T,X)\mapsto TXT^{-1}$　n维表示

定义(酉表示/正交表示)　G=群, $(V,(,))$为酉空间(实内积空间)　设 $\varphi:G\to GL(V)$ 为线性表示满足 $\forall g\in G$, $\varphi(g)$为V上酉变换(正交变换), 则称 (V,φ) 为G在V上的酉表示(正交表示)

定理: 紧群G上的任一有限维复(实)表示(V,φ)均为酉(正交)表示.

Pf: $\forall$取内积 $(-,-):V\times V\to\mathbb{C}$. 记 $\langle u,v\rangle := \int_G (\varphi(g)u,\varphi(g)v)\,dg$

$\int_G$为不变积分 $\Rightarrow$ $\langle,\rangle$为V上内积, 且满足 $\langle\varphi(h)u,\varphi(h)v\rangle=\langle u,v\rangle$ $\forall h\in G$.

$\Rightarrow$ $\varphi(h)$为$(V,\langle,\rangle)$上酉变换.

推论: 紧群的有限维复(实)表示均完全可约.

Pf: $U\le V$ 子表示 $\Rightarrow$ $V=U\oplus U^{\perp}$　□

推论: (V,φ)为G的n维复表示, 则$\exists$基B s.t. $a_{ij}(g^{-1})=a_{ji}(g)$　其中 $\varphi_B(g)=(a_{ij}(g))$

性质: Abel紧群的不可约复表示均为1维的.

Pf: $\forall g\in G$, 设λ为$\varphi(g)$的特征值.　$0\ne V_\lambda:=\{v\in V\mid \varphi(g)(v)=\lambda v\}\le V$

$\forall h\in G, \forall v\in V_\lambda$ $\Rightarrow$ $g(h(v))=h(g(v))=\lambda h(v)$ $\Rightarrow$ $h(v)\in V_\lambda$

$\Rightarrow$ V_λ为子表示 $\Rightarrow$ $V=V_\lambda$

$\Rightarrow$ $\varphi(g)$为数乘 $(\forall g)$ $\xrightarrow{V不可约}$ $\dim V=1$.

例: $SO_2\cong S^1$的不可约表示均为 $\varphi_n:S^1\to\mathbb{C}^*$　$z\mapsto z^n$ 的形式 $(n\in\mathbb{Z})$

§ 不可约表示的矩阵元的正交关系

4.1 在 $C(G,\mathbb{F})$ 上定义内积:

$$(f,g) := \int_G f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

4.2. $\overline{\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G} := \{G\text{ 的不可约 }\mathbb{F}\text{-表示}\}/\cong$

$\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G := \{G\text{ 的 }\mathbb{F}\text{-特征标}\}$

定理: $\varphi: G\to GL(V)$, $\psi: G\to GL(U)$ 不可约. 则

$\varphi_{B_V}(g) = (a_{ij}(g))_{n\times n}$ $\quad\psi_{B_U}(g) = (b_{ij}(g))_{m\times m}$

i) $\varphi\not\cong\psi \Rightarrow (a_{ij}, b_{kl}) = 0 \quad \forall i,j,k,l$

ii) $\mathbb{F}=\mathbb{C} \Rightarrow (a_{ij}, a_{kl}) = \frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jl}$

标准正交基!

Pf: $\forall f: V\to U$ $\quad f(\underbrace{e_1,\cdots,e_n}_{B_V}) = (\underbrace{\eta_1,\cdots,\eta_m}_{B_U})\,C$

$\varphi(g)(e_1\cdots e_n) = (e_1\cdots e_n)(a_{ij}(g))$

$\psi(g)(\eta_1,\cdots,\eta_m) = (\eta_1,\cdots,\eta_m)(b_{ij}(g))$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi(g)"'] & U \arrow[d, "\psi(g)"] \\ V \arrow[r, "f"] & U \end{tikzcd}$$

$\tilde{f} := \int_G \psi^{-1}(g)\circ f\circ\varphi(g)\,dg : V\to U$ $\quad \psi^{-1}(g)\circ f\circ\varphi(g)\,(e_1\cdots e_n) = (\eta_1\cdots\eta_m)\,(B^{-1}CA)$

$\quad B^{-1}CA = \overline{B}^TCA$

$\Rightarrow \tilde{f}$ 为 G-模同态

取 $f = \eta_k\otimes e_i^*$ (i.e. $C = E_{ki}$)

i) $\varphi\not\cong\psi$: $\Rightarrow \tilde{f}=0 \Rightarrow \int_G \overline{B}^T E_{ki} A\,dg = 0$

$\Rightarrow (a_{ij}, b_{kl}) = \int_G \overline{b_{kl}(g)}\,a_{ij}(g)\,dg = 0$

ii) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$、$\psi := \varphi \Rightarrow \tilde{f} = \lambda 1_V \Rightarrow \tilde{f} = \frac{\delta_{ik}}{n}\cdot 1_V$ $\quad(\mathrm{tr}\,\tilde{f} = \mathrm{tr}\,f = \delta_{ik})$

$\Rightarrow \int_G \overline{A}^T E_{ki} A\,dg = \frac{\delta_{ik}}{n}\cdot I_n$

$\Rightarrow (a_{ij}, a_{kl}) = \int_G a_{ij}(g)\,\overline{a_{kl}(g)}\,dg = \frac{\delta_{ik}}{n}\cdot\delta_{jl}$

注: 应用到有限群情形

推论：(V,ρ), (U,φ) 为紧群 G 的两不可约 $\mathbb{F}$表示 ($\dim V = n$, $\dim U = m$) 则

i) $\rho \not\cong \varphi \Rightarrow (\chi_\rho, \chi_\varphi) := \int_G \chi_\rho(g)\chi_\varphi(g^{-1})\,dg = 0$

ii) 若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 则 $(\chi_\rho, \chi_\rho) := \int_G \chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1})\,dg = 1$

推论：i) $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G$ 为 $C(G,\mathbb{C})$ 中的正交规范集 → 定义.

ii) $\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}} G$ 为 $C(G,\mathbb{R})$ 中的正交集

推论：$\rho \simeq \varphi \Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_\varphi$

推论：(不可约分解的重数) 不可约 φ 出现在 ρ 中重数为 $\dfrac{(\chi_\rho, \chi_\varphi)}{(\chi_\varphi, \chi_\varphi)}$.

推论：(不可约性判定) ρ 复, 则 ρ不可约 $\Leftrightarrow (\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

推论：$\varphi_n: S^1 \to \mathbb{C}^\times$ 为仅有的不可约表示.

Pf: $(\chi_\rho, \chi_{\varphi_n}) = 1 \Rightarrow \chi_\rho \perp e^{2\pi i n x} \Rightarrow \chi_\rho = 0$.

Peter-Weyl 定理

f 连续 周期 2π

$$\Rightarrow f(\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$$

其中 $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-in\theta}d\theta$

定理 (Fourier): S^1 上任一连续复函数均可由 $f_n: S^1\to\mathbb{C}^*$ 一致逼近

$$|f|:=\left(\int_G f(x)\overline{f(x)}\,dx\right)^{1/2}$$

定义: 称 $\Delta\subseteq C(G,\mathbb{C})$ 为正交完备集, 若两两正交且 $\forall f\in C(G,\mathbb{C})$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $c_1,\cdots,c_n$ 和 $f_1,\cdots,f_n$ s.t.

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right|<\varepsilon \qquad \forall x\in G.$$

定理 (Peter-Weyl) G 紧群. 则 G 的不可约复表示的矩阵元作成 $C(G,\mathbb{C})$ 的正交完备集, 且 n 阶矩阵元与自身内积为 $\frac{1}{n}$.

定理. G 紧. 则 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$ 为 G 上连续类函数空间的正交完备规范集.

证: 仅需证明完备性.

$\forall$ f $\exists$ g (Δ 中有限个元的复线性组合) s.t.

$$|f-g|<\varepsilon$$

$$g^a(x):=g(axa^{-1}) \Rightarrow |f-g^a|<\varepsilon$$

$$\tilde{g}:=\int_G g^a\,da \ (\text{类函数}) \Rightarrow |f-\tilde{g}|<\varepsilon$$

$$\left|\int_G\left(f(x)-\int_G g(axa^{-1})da\right)dx\right| = \left|\int_G\left(\int_G f(axa^{-1})-g(axa^{-1})\,dx\right)da\right|$$

$$\leqslant \int_G\left|\int_G f(y)-g(y)\,dy\right|da \leqslant \int_G \varepsilon\, da=\varepsilon.$$

$$g = \sum_{i,j,k} a_{ij}^{(k)} \Rightarrow \tilde{g} = \sum_{i,j,k} \widetilde{a_{ij}^{(k)}}$$ 仅需证明 $\widetilde{a_{ij}} \in \mathbb{C}\chi_\varphi$.

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int_G \varphi(axa^{-1})\,da$$ G-不变

$$\Rightarrow \widetilde{\varphi}(x) = \lambda(x)\, Id_V \xRightarrow{\text{trace}} \widetilde{\varphi}(x) = \frac{\chi_\varphi(x)}{\deg\varphi} Id_V$$

$$\Rightarrow \widetilde{(a_{ij})}(x) = \frac{\chi_\varphi(x)}{\deg\varphi} \cdot I_{\deg\varphi}$$

$$\Rightarrow \widetilde{a_{ij}} \in \mathbb{C}\cdot\chi_\varphi$$ □

推论：G 紧，g 和 h 不共轭 $\Rightarrow$ $\exists$ 不可约 χ s.t. $\chi(g) \neq \chi(h)$

推论：G 紧，Δ 为 $Cf_{\mathbb{C}}(G)$ 的正交完备集，$f \in Cf_{\mathbb{C}}(G)$. 则

$f \perp \Delta \Rightarrow f = 0$

推论：$Irr_{\mathbb{C}} G$ 的真子集不完备.(在 $Cf_{\mathbb{C}}(G)$ 中)

§6. SU_2 与 SO_3 的复表示

$1=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$ $i=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&\\&-\sqrt{-1}\end{pmatrix}$ $j=\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}$

$k=\begin{pmatrix}&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&\end{pmatrix}$

$$SU_2 := \left\{\begin{pmatrix}z_1 & z_2\\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix} \,\middle|\, z_1,z_2\in\mathbb{C},\ |z_1|^2+|z_2|^2=1\right\} \subseteq \mathbb{H} = \left\{\begin{pmatrix}z_1 & z_2\\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix} \,\middle|\, z_1,z_2\in\mathbb{C}\right\}$$

命题: 1) SU_2 为 $\mathbb{H}$ 中的单位球面. ($\Rightarrow$ 连通)

2) $SO_3 \cong SU_2/\{\pm I\}$

Pf: 1) ✓

2) $\mathbb{H}$ 上内积: $\forall X\in\mathbb{H} \Rightarrow (X,X) := \det(X)$

共轭作用: $SU_2 \curvearrowright \mathbb{H}$ (酉作用: $\det(uXu^{-1})=\det(X)$) 保持 $\mathbb{R}\cdot 1$ 不变

$\Rightarrow$ 共轭作用在 $(\mathbb{R}\cdot 1)^{\perp} = V =: \mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k \subseteq \mathbb{H}$

$= \{v\in\mathbb{H} \mid tr(v)=0\}$

$\Rightarrow SU_2 \xrightarrow{\varphi} O_3$

$\Rightarrow SU_2 \xrightarrow{\varphi} SO_3$ (SU_2 连通)

设 $A\in\ker\varphi \Rightarrow A\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix} \Rightarrow A=\pm I$

仅需证明 φ 满:

1°. $SU_2 \overset{\varphi}{\curvearrowright} S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ 可迁: $\left(\forall v\in V \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v^* = -v \Rightarrow (\sqrt{-1}v)^* = (\sqrt{-1}v) \\ tr\, v = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{-1}v \sim \begin{pmatrix}c&\\&-c\end{pmatrix}\ (\text{酉相似}) \Rightarrow v\sim c\,i\right)$

2°. $\varphi_B\begin{pmatrix}e^{i\theta}&\\&e^{-i\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos2\theta&-\sin2\theta\\0&\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}$ $B=\{i,j,k\}$

$1^\circ, 2^\circ \Rightarrow SU_2 \twoheadrightarrow SO_2$

$I=(x,y) \lhd \mathbb{C}[x,y] \circlearrowleft GL_2(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \Phi_n : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(I^n/I^{n+1})$

$\left(\Phi_n(A) f\right)(x,y) := f((x,y)A)$

$\Rightarrow \Phi_n = \Phi_n\big|_{SU_2}$

引理：1) (V_n, Φ_n) 为 SU_2 的不可约复表示

2) (V_{2n}, Φ_{2n}) 为 SO_3 的不可约复表示

Pf: 1) $0 \neq W \subseteq V_n$ 子表示. $T := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,\middle|\, |\alpha|=1 \right\}$

$\Phi_n\left(\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\right)(x^k y^{n-k}) = \alpha^{2k-n} x^k y^{n-k}$

$\Rightarrow V = \bigoplus_k \mathbb{C} x^k y^{n-k}$ (作为T-表示)

$\Rightarrow W = \bigoplus_{k\in\Sigma} \mathbb{C} x^k y^{n-k} \Rightarrow x^r y^{n-r} \in W$ for some r

$\Rightarrow (\alpha x - \bar{\beta} y)^r (\beta x + \bar{\alpha} y)^{n-r} \in W \Rightarrow x^n \in W$

$\Rightarrow (\alpha x - \bar{\beta} y)^n \in W \Rightarrow x^i y^{n-i} \in W \quad \forall i \Rightarrow \square$

2) $\left(\Phi_n(-I) f\right)(x,y) = f(-x,-y) = (-1)^n f(x,y) \Rightarrow \Phi_{2n}(-I) = id$ $\square$

定理：1) $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(SU_2) = \{ (V_n, \Phi_n) \mid n=0,1,2,\cdots \}$

2) $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(SO_3) = \{ (V_{2n}, \Phi_{2n}) \mid n=0,1,2,\cdots \}$

Pf: 仅需证：χ_n 构成 SU_2 的类函数空间的完备集.

$\forall f$ 类函数 $\Rightarrow f(U) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\right)$ 酉相似对角化 $|\alpha|=1$

$\Rightarrow f$ 由 $f|_T$ 唯一确定. $\Rightarrow f$ 看成 S^1 上的函数

$$\psi: Cf_{\mathbb{C}}(SU_2) \hookrightarrow Cf_{\mathbb{C}}(T) = Cf_{\mathbb{C}}(S^1)$$

$$f \mapsto f|_T \mapsto \left(\alpha \mapsto f\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\right) \qquad \alpha = e^{ix}$$

$\mathrm{Im}\,\psi = \{ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g$ 为以 2π 为周期的偶函数 $\}$

$$\psi(\chi_n - \chi_{n-2}) = e^{-inx} + e^{inx} = 2\cos nx$$

$\Rightarrow \psi(\chi_0), \psi(\chi_1), \psi(\chi_2 - \chi_0), \psi(\chi_3 - \chi_1), \cdots$ 在 $\mathrm{Im}\,\psi$ 中完备.

$\Rightarrow \chi_0, \chi_1, \cdots$ 在 $Cf_{\mathbb{C}}(SU_2)$ 中完备.